ЛЕКЦІЯ

Тема: Матриці та визначники.
Мета: Вивчити основні види матриць, набути навички виконання дій з матрицями. Знати поняття визначників другого і третього порядку, властивості визначників, способи їх обчислення.
План: 1. Означення матриці, основні види матриць.
3. Дії з матрицями.
4. Ранг матриці.
5. Обернена матриця та побудова оберненої матриці.
6. Означення визначників другого і третього порядків
7. Властивості визначників.

Література: [1]; [2]; [3]; [7].

Матрицею називається прямокутна таблиця з чисел (елементів матриці), що містить деяку кількість рядків та стовпців. Матриця A з елементами a_{ij} розміру $m\times n$ має m рядків та n стовпців і позначається так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Якщо матриця містить однакову кількість рядків і стовпців вона називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*.

Матриця, у якої всього один рядок, називається *матрицею-рядком*, а матриця, у якої всього один стовпець, – *матрицею-стовпцем*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці утворюють *головну діагональ*, а елементи $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ – *побічну діагональ*.

Якщо в матриці A поміняти місцями рядки і стовпчики, одержимо матрицю, яка називається *транспонованою до матриці* A і позначається A^T .

Квадратна матриця, в якої всі елементи, що знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю, називається *діагональною* матрицею.

Діагональна матриця, всі елементи якої, що містяться на головній діагоналі, дорівнюють одиниці, називається *одиничною* матрицею:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Якщо A і B – матриці одного розміру, то вони вважаються *рівними*, якщо рівні їх відповідні елементи $a_{ij}=b_{ij}$.

Сумою матриць A і B є матриця C з елементами $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. Операція додавання матриць можлива лише для матриць однакового розміру.

Добутком матриці A на число k є матриця B з елементами $b_{ij}=ka_{ij}$.

Добутком матриці A розміру $m\times n$ на матрицю B розміру $n\times k$ є матриця C , розміром $m\times k$, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

(тобто елемент c_{ij} , який стоїть в *i*-му рядку та *j*-му стовпці матриці C , дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці B). Операція множення двох матриць можлива лише за умови, коли кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B . Операція множення матриць не комутативна, тобто при множенні матриць не можна міняти місцями множники:

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA} \; .$$

Слід відзначити, що AE = EA = A.

Будь-якій квадратній матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається *визначником цієї матриці* і позначається символом det A:

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Прямокутна матриця визначника не має.

Рангом матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля, (позначається $r(A)$). Якщо всі елементи матриці $a_{ij}=0,$ то $r(A)=0$.

Крім безпосереднього обчислення мінорів, ранг матриці можна знайти простішим методом, який ґрунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над матрицею виконати так звані *елементарні перетворення*, а саме:

- замінити рядки стовпцями (при цьому стовпці заміняються відповідними рядками);
- переставити місцями два рядки (стовпці);
- помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
- викреслити рядок (стовпець), всі елементи якого дорівнюють нулеві;
- додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Всі ці перетворення не змінюють ранг матриці, але з їх допомогою матрицю зводять до матриці, у якої нижче головної діагоналі всі елементи – нулі. Тоді ранг матриці дорівнює кількості елементів головної діагоналі, відмінних від нуля.

Приклад 1.4. Знайти матрицю $C=\mathbf{AB}$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

Кількість стовпців матриці $A_{2\times2}$ дорівнює кількості рядків матриці $B_{2\times3}$, тому за означенням маємо

$$C_{2\times3}=A_{2\times2}B_{2\times3}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-2) & 1\cdot2+2\cdot0 & 1\cdot3+2\cdot(-1) \\ 0\cdot1+(-1)\cdot(-2) & 0\cdot2+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim$$

Віднімаючи від третього рядка 2-й, а від 4-го перший, дістанемо:

$$\sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

Від другого рядка віднімемо потроєний перший:

$$\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim$$

Від четвертого рядка віднімемо другий:

$$\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\sim$$

Від четвертого віднімемо третій:

$$\sim\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, $r(A)=3$.

(Знак ~ між матрицями показує, що вони утворюються одна з другої елементарними перетвореннями і, отже, мають один і той самий ранг).

Обернена матриця

Нехай A – деяка квадратна матриця n -го порядку.

Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо виконується умова

$$\mathbf{AA^{-1}}=A^{-1}A=E,$$

де E – одинична матриця.

Квадратна матриця A називається *виродженою*, якщо $\det A=0$ *й невиродженою*, якщо $\det A\neq 0$.

Теорема. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Обернена матриця знаходиться за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (1.6)$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A.

Приклад 1.6. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Обчислимо визначник матриці A :

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-2.$$

Матриця A невироджена, тому обернена матриця знаходиться за формулою (1.6). Знаходимо алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-11; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-13; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-19;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-8; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-10; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-14;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=7; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=9; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=13.$$

Складемо обернену матрицю

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 11 & 8 & -7 \\ 13 & 10 & -9 \\ 19 & 14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Визначники. Визначники другого і третього порядківта їх властивості

Вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

називається *визначником (детермінантом) другого порядку*.

Вираз

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32}a_{11} \tag{1.2}$$

називається *визначником третього порядку.*

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника*, причому перший індекс i показує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Елементи a_{11}, a_{22} у визначнику (1.1) і a_{11}, a_{22}, a_{33} у визначнику (1.2) складають *головну діагональ* визначника, а елементи a_{12}, a_{21} і a_{13}, a_{22}, a_{31} в тих самих визначниках – *побічну діагональ.*

Для обчислення визначника другого порядку потрібно від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за *правилом трикутників* (рис. 1.1.): перші три доданки в правій частині формули (1.2) є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі й у вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿
|¿ ¿ ¿| |¿ ¿ ¿| |¿ ¿ ¿| |¿ ¿ ¿| |¿ ¿ ¿|
Δ = ¿ ¿ ¿ + · ¿ ¿ + ¿ ¿ ¿ - ¿ ¿ ¿ - ¿ ¿ ¿ -
¿ ¿ ¿
|¿ ¿ ¿|
¿ ¿ ¿ .

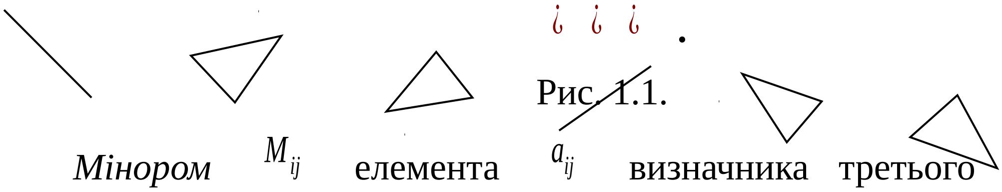

Рис. 1.1.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку Δ називається визначник другого порядку, який утворюється з Δ в результаті викреслювання рядка й стовпця, що містять a_{ij}.

Розглянемо визначник третього порядку Δ, заданий формулою (1.2). Для кожного з дев’яти елементів цього визначника існує свій мінор. Наприклад, мінором елемента a_{12} є визначник $M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. Його можна дістати з елементів визначника (1.2), викресливши у ньому перший рядок і другий стовпчик.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника третього порядку називають його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Теорема. *Кожний визначник можна подати як суму добутків елементів одного якого-небудь рядка (або стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розкладання визначника (1.2) за елементами другого стовпця здійснюють за формулою

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32},$$

де

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється, якщо всі його рядки замінити відповідними стовпцями (стовпці при цьому замінюються відповідними рядками).
2. Визначник, що має нульовий рядок (стовпець) дорівнює нулю.
3. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
4. При перестановці двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.
5. Спільний множник елементів деякого рядка (стовпця) можна винести множником за знак визначника.
6. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.
7. Визначник, що має два пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю.
8. Якщо у визначнику деякий (наприклад, *i*-й) рядок є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників, у яких усі рядки, крім *i*-го, будуть такі, як у даному визначнику; *i*-й рядок першого визначника складатиметься з перших доданків, а *i*-й рядок другого визначника складається з других доданків.

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ за правилом трикутника.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 4 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 2\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot 3 = -10.$$

Приклад 1.2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$, розкладаючи його за елементами третього рядка.

Розв'язування.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

Домашнє завдання: вивчити конспект.

Питання для самоконтролю

1. Що називається визначником другого порядку?
2. Що називається визначником третього порядку?
3. Сформулювати основні властивості визначників.
4. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням?
5. Сформулювати та довести теорему про розклад визначника за елементами рядка (стовпця). Чому дорівнює сума добутків елементів одного рядка (стовпця).
6. Що називається матрицею?
7. Як визначається сума двох матриць?
8. Як визначається добуток матриці на число?
9. Як визначається різниця двох матриць?
10. Як визначається добуток двох матриць?
11. Що називається оберненою матрицею?
12. У якому випадку оберненої матриці не існує?
13. Що таке транспонована матриця?
14. Як будується обернена матриця?