ЛЕКЦІЯ

Тема: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета роботи: Вивчити **с**истеми лінійних рівнянь і їх сумісність; розуміти геометричну інтерпретацію системи рівнянь другого порядку. Опанувати способи розв'язування систем лінійних рівнянь: Крамера, Гауса.

План вивчення теми:

1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
3. Кількість розв’язків системи лінійних рівнянь.
4. Формули Крамера.
5. Метод Гауса.

Література [1]; [3]; [4]; [5]; [8]

Хід заняття:

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з n невідомими:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{array}$$

де a_{ij} (i = 1, …, m; j = 1, …, n) – відомі коефіцієнти; b_{ij} (i = 1, …, m) – праві частини (або вільні члени), також відомі; x_1, x_2 ,…, x_n - невідомі, які слід визначити. Позначимо:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матриця A називається ***матрицею системи***. Систему запишемо у матричній формі:

$$AX=B.$$

Розв’язком системи називається набір чисел α_1 , α_2 , …, α_n , які при підстановці рівняння перетворюють їх в тотожність. Система називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв’язок, і ***несумісною***, якщо вона розв’язків не має. Дві системи називаються ***еквівалентними***, якщо вони несумісні або мають однакові розв’язки.

Формули Крамера

Дана система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, система має єдиний розв'язок, що знаходять за ***формулами Крамера:***

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

де Δ_j - допоміжні визначники, які одержують із Δ шляхом заміни j-го стовпця стовпцем вільних членів системи.

Приклад 1.2

Розв'язати систему, використовуючи формули Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язок: Обчислюємо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Знаходимо Δ_1. Його одержуємо шляхом заміни першого стовпця стовпцем вільних членів системи:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} +III \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Аналогічно знаходимо визначники Δ_2 та Δ_3.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +I \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тоді за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{4}{2} = 2.$$

Матричний спосіб розв'язання СЛАР

Запишемо систему у матричній формі:

$$AX = B.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то ***розв'язок системи у матричній формі***

$$X = A^{-1}B \quad .$$

Приклад 1.3

Розв’язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв’язок: Запишемо систему у матричній формі:

$$AX = B \quad ,$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник матриці *A*, який дорівнює $|A| = -6 \neq 0$. Отже, обернена матриця A^{-1} існує. Вона має вигляд:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Тоді розв’язок системи

$$X = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 \\ -13 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 9 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 3 \cdot 4 \\ -13 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \\ -1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

звідси x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1.

Методи Гауса та Жордана-Гауса

Розглянемо систему *m* лінійних алгебраїчних рівнянь відносно *n* невідомих. Метод Гауса є універсальним методом, сутність якого складається у послідовному вилученні невідомих.

На першому етапі одержуємо систему:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

На другому етапі з отриманої системи знаходимо x_m , x_{m-1} , …, x_1 .

Запишемо розширену матрицю системи (1.2):

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} .$$

За допомогою еквівалентних перетворень (працюючи тільки з рядками) розширену матрицю зводимо до вигляду

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{pmatrix}.$$

Звідки знаходимо послідовно x_m, x_{m-1}, …, x_2, x_1.

Приклад 1.4

Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язок: Перетворюємо розширену матрицю системи:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, повертаючись до системи, маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + 6x_3 = 20, \\ x_3 = 3. \end{cases} \uparrow \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 2 - 3 = 1, \\ x_2 = 20 - 6x_3 = 20 - 6 \cdot 3 = 2, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.

Зведемо розширену матрицю системи *B* до вигляду

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b''_m \end{pmatrix},$$

тоді маємо метод Жордана-Гауса. Розглянемо його на прикладі 1.4:

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2I \\ -3I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \end{pmatrix} \begin{matrix} -II \\ \\ +II \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ :2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -14 \\ 0 & 1 & 6 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} +5III \\ -6III \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Отже, робимо висновок: x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3.

Домашнє завдання: вивчити конспект

Питання для самоконтролю:

1. Що називається системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими?

2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною; несумісною; визначеною; невизначеною?
3. Записати формули Крамера. В якому випадку вони застосовуються?
4. У чому полягає метод Гауса?
5. За яких умов однорідна система лінійних рівнянь має єдиний нульовий розв'язок; безліч розв'язків?