Лекція №

Тема: Векторна алгебра та аналітична геометрія.

Мета: оволодіти основними поняттями з теми, навчитись застосовувати отриманні знання при розв’язуванні задач.

1. Вектори.
2. Аналітична геометрія на площині.

1. Вектори

Означення. Вектором (*n*-вимірним вектором, геометричним вектором) називається впорядкований набір чисел $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Означення. Вектори називаються рівними, якщо співпадають їхні розмірності та всі компоненти.

Приклад. Вектори (1;2;3) та (1;3;2) рівними не є, незважаючи на те, що множина {1;2;3} дорівнює множині {1;3;2} .

Означення. Нульовим вектором називається вектор $\bar{0} = (0; \ldots; 0)$.

Означення. Добутком вектора $\{x_n\} = \left\{10 + \frac{1}{n}\right\} = 10\frac{1}{2};\ 10\frac{1}{3};\ 10\frac{1}{4}; \ldots$ на число *k* називається вектор $A = l\mathrm{im}_{n \to \infty} x_n$.

Означення. Сумою векторів $\{x_n\} = \left\{10 + \frac{1}{n}\right\}$ та $x_n = \frac{3}{n^2}$ називається вектор $l\mathrm{im}_{n \to \infty} x_n = 0$.

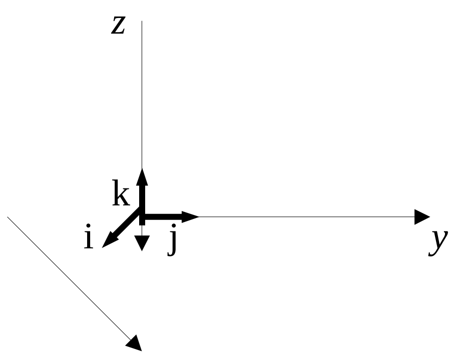
Означення. Скалярним добутком векторів $l\mathrm{im}_{n \to \infty} x_n = ¿ \quad .A,\ l\mathrm{im}_{n \to \infty} y_n = B$ ¿ та $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ називається *число* $\pm ¿\, y_n) = ¿ \quad .A \pm B$ $l\mathrm{im}_{n \to \infty} (x_n ¿$ ¿ .

Означення. Модулем (довжиною) вектора $l\mathrm{im}_{n \to \infty} (x_n ¿\, y_n) = ¿ \quad .A \cdot B$ ¿ називається число $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = ¿ \quad \frac{A}{B}$ ¿ .

Кут φ між векторами $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \left(10 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{3}{n^2}\right)$ та $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \left(10 + \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{3}{n^2}\right) = l\mathrm{im}_{n \to \infty} \left(10 + \frac{1}{n}\right) \cdot l\mathrm{im}_{n \to \infty} \left(2 - \frac{3}{n^2}\right) = 10 \cdot 2 = 20$ задається формулою $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \frac{n+5}{4n}$. При *n*=2 ця формула співпадає зі шкільною формулою для кута між векторами на площині.

Вектори називаються ортогональними, якщо їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Це виконується за умови cosφ=0 , тобто при $φ=90^0$.

Розглянемо також просторову систему координат з ортами $\frac{n+5}{4n} = \frac{1 + \frac{5}{n}}{4}$, $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{2n^2 - n}$ та $l\mathrm{im}_{n \to \infty} \frac{n^2 + 3n - 5}{2n^2 - n} = l\mathrm{im}_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1+0+0}{2-0} = \frac{1}{2}$ (рис. 1).



x

Рис. 1.

Виконується така <u>теорема</u>: Кожен вектор в *n*-вимірному просторі єдиним способом розкладається по координатних осях.

Зокрема, в тривимірному просторі

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n \quad ,$$

а в двовимірному

$$S_n = \frac{2 \cdot 2 + 10(n-1)}{2} n = 5n^2 - 3n \quad .$$

Нехай $S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ та $S_n = 1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ - вектори, а k - дійсне число. Виконуються такі властивості:

$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;

$S = 1 \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2$;

$S = 1 \cdot \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}$;

$S = 1 \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = 2$;

$t = \frac{\ln 2}{\ln 1,1}$;

$FV = PV \cdot (1+r)^t$;

$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$;

$\overline{0} \cdot k = k \cdot \overline{0} = \overline{0}$;

$p = 5000 \cdot \frac{0,06}{1,06^3 - 1} \approx 1570,55$;

$PV_1 = \frac{FV_1}{1+r} = \frac{1200}{1+0,07} = 1121,5 \text{ грн.}$.

Наведемо деякі формули, що стосуються векторів у тривимірному просторі.

Кут між двома векторами $= FV \cdot \frac{1}{1+r} \cdot \frac{1-(1+r)^{-4}}{1-(1+r)^{-1}} = 1200 \frac{1-1,07^{-4}}{0,07} \approx 4064,6 \text{ грн.}$ та $PV = PV_1 + PV_2 + \ldots = \frac{FV_1}{1+r} + \frac{FV_2}{(1+r)^2} + \frac{FV_3}{(1+r)^3} \ldots = \frac{1000}{1,12} + \frac{1000}{1,12^2} + \frac{1000}{1,12^3} + \ldots$ обчислюєть за формулою

$$PV = \frac{1000}{1,12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1,12}} = \frac{1000}{0,12} = 8333,33 \text{ грн.} \quad .$$

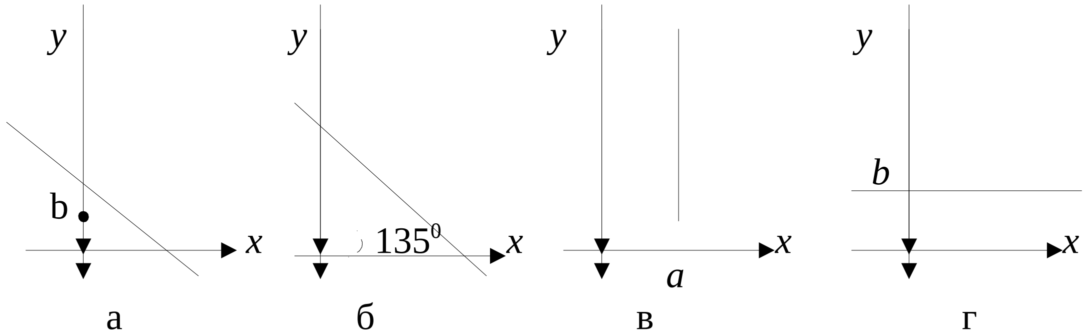
2.2. Аналітична геометрія на площині

Пряма лінія на площині найчастіше задається у вигляді рівняння

$$y = k \cdot x + b \qquad (2.3)$$

де $k = tg\alpha$ - нахил цієї прямої до осі *O*X (рис 2,а).

Частинні випадки розташування прямої ($y=kx$, $x=a$, $y=b$) показані, відповідно, на рис.2.(б-г).



а б в г

Рис.2

Загальне рівняння прямої на площині має вигляд

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2.2)$$

Якщо $B \neq 0$, то рівняння (2.2) можна перетворити у (2.1).

Наведемо ще деякі з рівнянь, які задають пряму на площині.

Пряма, яка проходить через дві задані точки (x_1;y_1) та (x_2;y_2):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \qquad (2.3)$$

або, що те саме,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x-x_1 & y-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.3')$$

Пряма, яка проходить через задану точку (x_1;y_1) паралельно до заданої прямої $y=ax+b$:

$$y-y_1=a(x-x_1) \qquad (2.4)$$

Пряма, яка проходить через задану точку (x_1;y_1) перпендикулярно до заданої прямої $y=ax+b$:

$$y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1) \qquad (2.5)$$

Рівняння прямої у відрізках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (2.6)$$

Переходи від одного вигляду рівняння прямої до іншого виконують за допомогою нескладних перетворень.

<u>Приклад</u>. Загальне рівняння прямої має вигляд $2x-y+2=0$.

Перейдемо до рівняння прямої у відрізках:

$$-2x+y=2,$$

$$\frac{x}{-1}+\frac{y}{2}=1.$$

Перейдемо до рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y=2x+2.$$

Візьмемо на нашій прямій дві точки, наприклад, (x_1;y_1)=(-1;0) та (x_2;y_2)=(0;2),і побудуємо рівняння прямої, яка проходить через ці дві точки:

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x+1}{0+1}.$$

Наведемо ще декілька формул щодо прямих на площині.

Кут між прямими $y=a_1x+b_1$ та $y=a_2x+b_2$ обчислюється за формулою

$$tg\,\alpha=\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}$$

Прямі $y=a_1x+b_1$ та $y=a_2x+b_2$ є паралельними, якщо $a_1=a_2$, та перпендикулярними, якщо $a_1\cdot a_2=-1$.

Точка перетину прямих є розв’язком системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}.$$

Відстань від точки M(x_1;y_1) до прямої $Ax+By+C=0$ визначають за формулою

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B_2}}\right|.$$

Розглянемо також основні *криві другого порядку* та їхні рівняння. Це такі криві, рівняння яких містять змінні x^2 і/або y^2.

Рівняння кола з центром у точці (a;b) та радіусом **r** має вигляд

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 .$$

У частковому випадку (коло одиничного радіуса з центром у початку координат) це рівняння спрощується:

$$x^2+y^2=r^2 .$$

Рівняння еліпса (геометричного місця точок, сума відстаней до яких від двох заданих точок є сталою) записується так (рис. 2.7):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

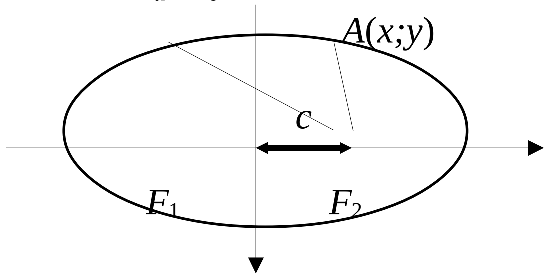


Рис. 2.7.

Точки $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$ називаються при цьому *фокусами*.

Виконуються такі властивості:

- для довільної точки A на еліпсі $|\overline{AF_1}|+|\overline{AF_2}|=2a$;
- $c^2=a^2-b^2$.

Рівняння гіперболи (геометричного місця точок ($x;y$), для яких різниця відстаней до фокусів F_1 та F_2 є сталою) має вигляд (рис. 2.8):

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Для гіперболи виконуються такі властивості:

- для довільної точки A на гіперболі $|\overline{AF_1}|-|\overline{AF_2}|=2a$;
- $c^2=a^2+b^2$.

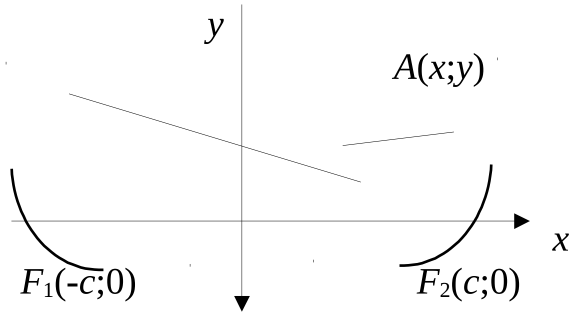


Рис. 2.8.

Рівняння параболи (геометричного місця точок, однаково віддалених від заданої точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ і заданої прямої $x=-\frac{p}{2}$) є таким (рис. 2.9):

$$y = 2px$$

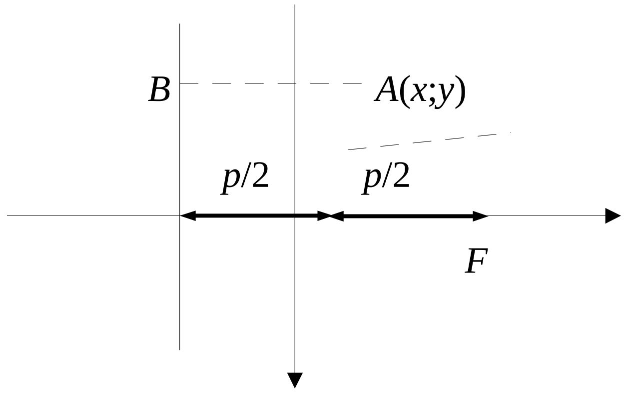


Рис. 2.9.

Тут для довільної точки $A(x;y)$ параболи $y = 2px$ виконується рівність $|\overline{AB}| = |\overline{AF}|$, де $|\overline{AB}|$ - відстань від точки A до прямої $x=-\frac{p}{2}$.

Домашнє завдання: Грисенко М.Я. розділ 2, розділ 3 вивчити.