Лекція №

Тема: Функціональна залежність. Елементарні функції. Границя функції. Неперервність функцій.

Мета: Повторити елементарні функції , вивчити поняття неперервності та границі функції.

Література: 1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Математика для економістів: Вища математика

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Навчальний посібник

Розглянемо деякі основні поняття функції однієї змінної, яку будемо позначати аналітично $y = f(x)$.

Одним із найважливіших понять математичного аналізу є поняття границі функції.

<u>Границею</u> функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ називають число b, якщо яке б не було додатне число ε, можна знайти такий номер N, що для всіх x, більших N, виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Границю функції записують у вигляді

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b.$$

<u>Границею</u> функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ називають число b, якщо для довільного додатного ε знайдеться таке $\delta > 0$, що якщо виконується нерівність $|x - x_0| < \delta$, то матиме місце також нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

У цьому випадку границю функції записують у такому вигляді:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

<u>Нескінченно малою</u> називають функцію, границя якої дорівнює нулю.

<u>Нескінченно великою</u> називають функцію $y = f(x)$, якщо починаючи з деякого номера N значення функції для всіх $x > N$ стає більшим за будь-яке велике значення C, тобто $f(x) > C$ при $x > N$.

Оберненою функцією до нескінченно малої є нескінченно велика функція і навпаки. Символічно це твердження (не строго математично) можемо записати так: $\frac{1}{0} = \infty, \frac{1}{\infty} = 0$.

Основними властивостями границі функції є такі властивості:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm \varphi(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \quad \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$.

При обчисленні границі функції під знак границі підставляють значення x_0 ($x \to x_0$) замість x.

<u>Приклад 6</u>. Обчислити границю функції

$$\lim_{x \to 3} \left(5 - \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \right).$$

<u>Розв’язання</u>. Замість x підставимо число 3 під знаком границі. Одержимо

$$\lim_{x \to 3} \left(5 - \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1} \right) = 5 - \frac{3^2 - 2 \cdot 3 + 5}{3 + 1} = 5 - \frac{8}{4} = 5 - 2 = 3.$$

Приклад 7. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}.$$

Розв'язання. Підставимо число 2 замість x і одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}=\frac{4-8+4}{4+2}=\frac{0}{6}=0.$$

Приклад 8. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}.$$

Розв'язання. Підставимо число 1 замість x і одержимо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{1+3-1}{1-1}=\frac{3}{0}.$$

В силу четвертої властивості границю функції не обчислюють. Але будемо виходити із визначення нескінченно малої та великої функцій і зв'язку між ними. Тоді вираз $\frac{1}{0}$ позначили "∞". Це знак границі нескінченно великої функції. Тобто:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}=\frac{3}{0}=3\cdot\frac{1}{0}=3\cdot\infty=\infty.$$

Часто при обчисленні границь виникають невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$; $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; $\{\infty-\infty\}$; $\{0\cdot\infty\}$; $\{1^{\infty}\}$; $\{0^0\}$; $\{\infty^0\}$. Для того щоб розкрити ці невизначеності, необхідно зробити деякі алгебраїчні перетворення виразів, які є під знаком границі, або ж застосувати так звані "визначні" границі. Основними з них є такі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – перша “визначна” границя;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$ – другі “визначні” границі, а число $e\approx 2,72$ і називається сталою Ейлера.

Приклад 9. Обчислити границю функції

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}.$$

Розв’язання.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\frac{2+6-2\cdot 4}{4-4}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ розкладемо на множники чисельник і знаменник виразу, а потім скоротимо на вираз $(x-2)$. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}=\frac{-2\left(2+\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{5}{2}$$

.

Приклад 10. Знайти границю функції

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}.$$

Розв’язання. Після підстановки $x=-2$ одержимо невизначеність виду

$\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{11-2}}{4-4}=\frac{3-3}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для того, щоб вираз, який знаходиться під знаком границі, скоротити на $(x+2)$, домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжене чисельника. Одержимо:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(x^2+2x\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{7-x-11-x}{x(x+2)\left(\sqrt{7+2}+\sqrt{11-2}\right)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2x-4}{x(x+2)\cdot(3+3)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{-2(x+2)}{6x(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{-2}{6x}=\frac{-2}{6\cdot(-2)}=\frac{1}{6}.$$

Еквівалентними називаються дві нескінченно малі функції, границя відношення яких при $x\to x_0$ дорівнює одиниці. Еквівалентність функцій позначають знаком “~”, тобто $f(x)\sim\varphi(x)$. В силу першої “визначної” границі можна записати $\sin\alpha\sim\alpha$. Еквівалентними при $\alpha\to 0$ будуть також функції: $\operatorname{tg}\alpha\sim\alpha$, $\arcsin\alpha\sim\alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$ та інші.

Приклад 11. Знайти границю виразу

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}.$$

Розв’язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}=\frac{0\cdot\operatorname{tg}0}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

У даному випадку для розкриття невизначеності слід використати першу “визначну” границю, або еквівалентність функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}=\left|\begin{matrix}1-\cos 8x=\\=2\sin^2 4x\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{2\sin^2 4x}=\left|\operatorname{tg}6x\sim 6x,\ \sin 4x\sim 4x\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{2\cdot(4x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{2\cdot 16x^2}=\frac{6}{2\cdot 16}=\frac{3}{16}.$$

<u>Приклад 12</u>. Обчислити границю виразу

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}.$$

<u>Розв’язання</u>. У цьому випадку одержуємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$.

Звертаємо увагу тільки на найвищий степінь x (x^4). Розділимо вираз почленно на найвищий степінь x і перейдемо до обчислення нескінченно малих функцій. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{3x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^3}-3}=$$

$$=\left|\begin{matrix}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}=0;\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^4}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0\end{matrix}\right|=\frac{1+0-0}{0+0-3}=-\frac{1}{3}.$$

Домашнє завдання: Грисенко М.Я. §5.4 вивчити