**Лекція №**

**Тема:** Похідна функції та диференціал.
**Мета:** сформувати поняття похідної, вивчити таблицю похідних та навчитись застосовувати ці знання при розв'язанні задач.
**План:**

1. Задачі, що приводять до поняття похідної.
2. Таблиця похідних. Похідні складних функцій.
3. Диференціал, його геометричний та економічний зміст.
4. Застосування диференціала до наближених обчислень.

**Література:** [1]; [3]; [6]; [7].

**Хід заняття:**

До поняття *похідної* приводять різноманітні задачі геометрії, механіки, хімії, економіки, біології та інших наук. Розглянемо деякі з них.

**Задачі про витрати виробництва та виручку**

Нехай $K = K(x)$ - витрати виробництва однорідної продукції – деяка функція кількості продукції *x*. Зазначимо, що кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва продукції $K(x + \Delta x)$. Отже, диференціальне відношення, що характеризує середній приріст витрат виробництва,

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Воно відбиває приріст витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва*.

Нехай $U(x)$ - виручка від продажу *x* одиниць товару. Міркування, аналогічні до попередніх, приводять до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x),$$

яку називають *граничною виручкою*.

*Похідною* функції $y = f(x)$ у точці $x_0$ називається **границя відношення приросту цієї функції до приросту аргументу** $\Delta x$, коли приріст аргументу прямує до нуля.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Таблиця похідних елементарних функцій:

1. $(C)' = 0$.
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$.

6. $(\cos x)' = -\sin x$.

7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

11. $(arctg)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основні правила диференціювання:

13. $(u+v)' = u' + v'$ 14. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ 15. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

Похідна складної функції:

Якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційовна в точці *x*, а функція $y = f(u)$ диференційовна у відповідній точці *u*, то складна функція $y = f[\varphi(x)]$ диференційована в точці *x* і справедлива наступна формула:

$$\boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_x}.$$

**Диференціал функції**

***Означення.*** Величина $f'(x)\Delta x$ називається **диференціалом функції *f(x)* за приростом *Δx*.**

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx}$$

***Зауваження.*** З останньої формули випливає, що $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Оскільки $dx = \Delta x = x - x_0$, то

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x),$$

і при досить малих $\Delta x$ має місце формула

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

якою часто користуються при *наближених обчисленнях*.

За допомогою диференціала може бути розв’язана задача визначення абсолютної та відносної похибки функції по заданій похибці знаходження аргументу. Нехай необхідно обчислити значення заданої функції $y = f(x)$ при деякому значенні аргументу $x_1$, дійсна величина якого невідома, а відоме лише його наближене значення $x$ з абсолютною похибкою $|\Delta x| = |x - x_1|$. Якщо замість дійсного значення $f(x_1)$ візьмемо величину $f(x)$, то ми припустимося похибки, яка дорівнює

$$|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x$$

При цьому відносна похибка функції $\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ може бути обчислена (при достатньо малих $\Delta x$) за формулою

$$\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \qquad (1)$$

або

$$\delta y = \left|E_x(y)\right| \delta x,$$

де $\left|E_x(y)\right|$ - еластичність функції (по абсолютній величині) $\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ - відносна похибка знаходження аргументу $x$.

**Економічний зміст похідної:**

Для дослідження економічних процесів і розв'язку інших прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції.

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції $y$ до відносного приросту змінної $x$ при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'$$

Еластичність функції показує наближено, наскільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної $x$ на 1%.

Відмітимо властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної $x$ на темп зміни функції

$$T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

тобто

$$E_x(y) = xT_y \qquad (2)$$

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v) \qquad (3)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v) \qquad (4)$$

Еластичність функцій застосовується при аналізі попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту $y$ відносно ціни $x$ (або доходу $x$) – коефіцієнт, що визначається за формулою (1), який показує наближено, на скільки процентів зміниться попит (обсяг споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (по абсолютній величині) $\left|E_x(y)\right| > 1$, тоді попит вважають еластичним, якщо $\left|E_x(y)\right| = 1$, -нейтральним, якщо $\left|E_x(y)\right| < 1$, - нееластичним відносно ціни (або доходу).

**Домашнє завдання:** вивчити конспект.