Лекція №

Vivere est cogitate
Вивере эст когитате)
Жить - значит мыслить.

Тема: Функції багатьох змінних. Екстремуми функцій.
Мета: Сформувати поняття функції багатьох змінних, ознайомити учнів з алгоритмом знаходження екстремуму.
План:
1. Означення функції багатьох змінних. Область визначення.
2. Частинний приріст функції багатьох змінних, частинні похідні.
3. Алгоритм знаходження екстремумів функції багатьох змінних.

1. Якщо кожній парі значень (*x*, *y*) з множини *D* за законом *f* ставиться у відповідність певне значення *z* з множини *E*, то говорять, що задана ***функція z двох змінних*** *x, y*, і позначають $z=f(x,y)$.

Множина *D* називається ***областю визначення*** функції *z*, а множина *E* - ***областю її значень***. Змінні *x*, *y* називаються ***аргументами*** функції *z*. Областю визначення функції може бути вся площина *XOY* або її частина. Сама функція двох змінних може бути зображена у просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z=f(x,y)$ і називається рівнянням поверхні.

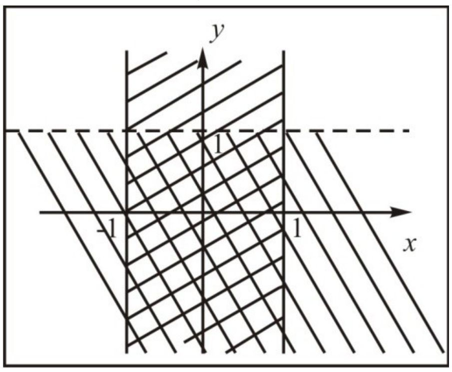
Приклад 1. Знайти область визначення функції та зобразити її на площині:

$$z=\arcsin^2 x+\frac{3}{\sqrt{1-y}}.$$

Розв'язок: Функція *z* визначена тільки тоді, коли $-1\le x\le 1$ та $1-y>0$. Маємо систему нерівностей

$$\begin{cases} -1\le x\le 1, \\ y<1. \end{cases}$$

Систему нерівностей зобразимо на площині *XOY*.



Це частина площини, що знаходиться між прямими $x=-1$ та $x=1$ і лежить нижче прямої $y=1$. Причому остання не належить до області визначення цієї функції.

2.*Частинним приростом* функції $z=f(x,y)$ **за змінною *x* є**

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,y).$$

Частинним приростом функції $z=f(x,y)$ за змінною *y* є

$$\Delta_y z=f(x,\ y+\Delta y)-f(x,y).$$

Повним приростом функції $z=f(x,y)$ називається величина

$$\Delta z = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y)$$.

Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до Δx за умовою, що Δx , то вона називається ***частинною похідною*** функції $z=f(x,y)$ за змінною *x* і позначається

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$.

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$.

Із означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x у вважається сталою, а при знаходженні z'_y змінна х вважається сталою.

Приклад. Нехай $z=4x^2+2xy+3y^2$ Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=8x+2y$ $\frac{\partial z}{\partial y}=2x+6y$

3. *Означення*. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;\ y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;\ y) \le f(x_0;\ y_0)$ $[f(x;\ y) \ge f(x_0;\ y_0)]$, тоді ця точка $(x_0,\ y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z=f(x;\ y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються *точками екстремуму*.

Алгоритм дослідження функції $z=f(x;y)$ на екстремум

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки на базі теореми:

Теорема (достатня умова екстремуму). Нехай функція $z=f(x;y)$ має екстремум у точці $(x_0;\ y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку, причому $f'_x(x_0;y_0)=0$ та $f'_y(x_0;y_0)=0$, а також $f''_{x^2}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=B$, $f''_{y^2}(x_0;y_0)=C$.
Якщо:

1) $AC-B^2>0$ і $A<0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка максимуму функції $z=f(x;y)$;
2) $AC-B^2>0$ і $A>0$, тоді $(x_0;\ y_0)$ точка мінімуму функції $z=f(x;y)$;
3) $AC-B^2<0$, тоді в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму.

4) $AC - B^2 = 0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Домашнє завдання: повторити таблицю похідних, вивчити конспект.