Практичне заняття №

Тема: Розв'язування систем

Мета: виробити практичні навички щодо матричного запису системи лінійних рівнянь та способів розв'язання системи лінійних рівнянь, ознайомитись із застосуванням матричного аналізу.

План заняття: 1. Розв'язування систем методом Крамера;
2. Розв'язування систем методом Гауса-Жордана.

Література: [2], [4], [5], [7], [8]

Завдання № 1. Визначити сумісність системи ЛАР $\begin{cases} x-y-z=0 \\ -x+2y+3z=5 \\ 3x+y+6z=23 \end{cases}$ і, якщо можливо, розв'язати матричним методом та методом Гауса.

1) Матричний метод.

$A\cdot X=B$, де $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Тоді $X=A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} – обернена матриця знаходиться з формули:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо визначник матриці А:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=9-15+7=1\neq 0.$$

Знаходимо дев'ять алгебраїчних доповнень до елементів визначника:

$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=12-3=9;$ $A_{21}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=5;$ $A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1;$

$A_{12}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=15;$ $A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=9;$ $A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-2;$

$A_{13}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7;$ $A_{23}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-4;$ $A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1.$

Тоді $A^{-1}=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 15 & 9 & -2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix};$ $X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 15 & 9 & -2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 23 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$x=2;\ y=-1;\ z=3.$

2) Метод Гауса.

Виписуємо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень тільки над строками приводимо її до діагонального вигляду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 23 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 23 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 9 & 23 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

З останнього рядка випливає, що $z=3$. Підставляючи знайдене $z=3$ у передостаннє рівняння $y+2z=5$, отримуємо $y=5-2z=5-6=-1$.

Невідому х знаходимо з першого рівняння $x-y-z=0$, $x=y+z=-1+3=2$. Відповідь $x=2;\ y=-1;\ z=3.$

Таким чином, розв’язки, отримані різними методами, співпали.

- Розв’язати систему ЛАР трьома способами.

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3=4 \\ x_1+2x_2-2x_3=5 \\ x_1-2x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

1) Правило Крамера $x_k=\frac{\Delta_{x_k}}{\Delta}$.

Знаходимо Δ – головний визначник і три допоміжних.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=6+10+4=20,$$

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=8+38+14=60$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=57-20+3=40$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & -2 & 2\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ -2 & 2\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=42-6-16=20$$

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\frac{60}{20}=3\ ; \quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\frac{40}{20}=2\ , \quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}=\frac{20}{20}=1\ .$$

2) Матричний спосіб: $X=A^{-1}\cdot B$, де $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$ матриця не

вироджена $|A|=20$.

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 2\end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=2$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=8$, $A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6$,

$A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-5$, $A_{22}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=10$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=5$

$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4$, $A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4$ $A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8$

$$A^{-1}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\ -5 & 10 & 5\\ -4 & 4 & 8\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}2 & 8 & 6\\ -5 & 10 & 5\\ -4 & 4 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}8+40+12\\ -20+50+10\\ -16+20+16\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}60\\ 40\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

$$x_1=3\ , \quad x_2=2\ , \quad x_3=1\ .$$

3) Метод Гауса.

Записуємо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень тільки над рядками цієї матриці приводимо матрицю коефіцієнтів до трикутного вигляду.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 | & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & -1 | & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} II+(-1)I \\ III+(-3)I \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x_1+2x_2-2x_3=5 \\ 4x_2-5x_3=3 \\ -5x_3=-5 \end{matrix}$$

¿

$$¿¿\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & -8 & 5 & |-11 \\ 0 & -4 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underset{II \leftrightarrow III}{\sim} ¿\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -5| & 3 \\ 0 & -8 & 5 & -11 \end{pmatrix} \underset{III+3 \cdot II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -5| & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow ¿|¿|¿¿¿$$

$$x_1 = 5 - 2x_2 + 2x_3$$

$$x_2 = \frac{3+5x_3}{4}$$

$$x_3 = 1$$

$$\Rightarrow$$

¿

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 1$$

¿

{ ¿ { ¿ ¿¿

¿

Відповідь: $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$.

- Розвязати систему, використовуючи програму MathCad

$$\begin{cases} 3x+y-2z=3 \\ x+2y-z=4 \\ 2x-2y+3z=1 \end{cases}$$

Det $\left|\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right| \to 19$

det2 $\left|\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right| \to 38$

Det1 $\left|\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right| \to 19$

det 3 $\left|\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right| \to 19$

Відповідь: 1; 2; 1.

- Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера:

$$a)\ \begin{cases} x_1+2x_2=8, \\ 3x_1-x_2=3. \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=-2, \\ 5x_1-x_2-x_3=10, \\ x_1-x_2+5x_3=-12. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Заходимо визначник системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7\neq 0$$

, тому система має єдиний розв'язок . Знаходимо

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-8-6=-14; \qquad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3-24=-21$$

.

За формулами Крамера , маємо:

$$x_1=\frac{-14}{-7}=2, \quad x_2=\frac{-21}{-7}=3.$$

б) Знаходимо визначник системи:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3(-5-1)-(25+1)-5+1=$$

$$=-18-26-4=-48\neq 0.$$

Система має єдиний розв'язок. Знаходимо $\Delta_{x_1},\ \Delta_{x_2},\ \Delta_{x_3}$:

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ -12 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix}=-2(-5-1)-(50-12)-$$

$$-10-12=12-38-22=-48;$$

$$\Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 10 & -1 \\ 1 & -12 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -12 & 5 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix}=3(50-12)+2(25+1)-$$

$$-60-10=114+52-70=96;$$

$$\Delta_{x_3}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 10 \\ 1 & -1 & -12 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & -12 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 1 & -12 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3(12+10)-(-60-10)-$$

$$-2(-5+1)=66+70+8=144.$$

За формулами Крамера, маємо:

$$x_1=\frac{-48}{-48}=1;\quad x_2=\frac{96}{-48}=-2;\quad x_3=\frac{144}{-48}=-3.$$

Підведення підсумків.
Домашнє завдання:
Розв'язати системи методом Крамера і Гауса.

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+x_2-5x_3=-1, \\ x_1-x_2-x_3=-2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5, \\ 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3. \end{cases}$