Практичне заняття

Тема: Знаходження границь

Мета: Навчитись знаходити границі функцій та досліджувати функцію на неперервність, вміти застосовувати важливі границі для обчислення границь.

План: 1. Знаходження границь функцій.

2. Застосування важливих границь.

Хід заняття:

Приклад. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}$.

Розв'язання. Підставимо число 2 замість x і одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2+2}=\frac{4-8+4}{4+2}=\frac{0}{6}=0.$$

Приклад. Обчислити границю функції $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\frac{2+6-2\cdot 4}{4-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Для розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ розкладемо на множники чисельник і знаменник виразу, а потім скоротимо на вираз $(x-2)$. Одержимо

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+3x-2x^2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x}=\frac{-2\left(2+\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{5}{2}$$

Приклад. Знайти границю функції $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}$.

Розв'язання. Після підстановки $x=-2$ одержимо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{7+2}-\sqrt{11-2}}{4-4}=\frac{3-3}{0}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Для того, щоб вираз, який знаходиться під знаком границі, скоротити на $(x+2)$, домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжене чисельника.

Одержимо:

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}}{x^2+2x}=\lim_{x\to-2}\frac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{11+x}\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}{\left(x^2+2x\right)\left(\sqrt{7-x}+\sqrt{11+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{7-x-11-x}{x(x+2)\left(\sqrt{7+2}+\sqrt{11-2}\right)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2x-4}{x(x+2)\cdot(3+3)}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{-2(x+2)}{6x(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{-2}{6x}=\frac{-2}{6\cdot(-2)}=\frac{1}{6}.$$

<u>Приклад</u>. Знайти границю виразу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}$.

<u>Розв’язання</u>. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos 8x}=\frac{0\cdot\operatorname{tg}0}{1-\cos 0}=\frac{0}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

У даному випадку для розкриття невизначеності слід використати першу “визначну” границю, або еквівалентність функцій:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{1-\cos8x}=\left|\begin{array}{l}1-\cos8x=\\ =2\sin^2 4x\end{array}\right|=\lim_{x\to0}\frac{x\operatorname{tg}6x}{2\sin^2 4x}=\left|\ \operatorname{tg}6x\sim6x,\ \sin4x\sim4x\ \right|=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\times6x}{2\times(4x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{6x^2}{2\times16x^2}=\frac{6}{2\times16}=\frac{3}{16}.$$

<u>Приклад</u>. Обчислити границю виразу $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}$.

<u>Розв’язання</u>. У цьому випадку одержуємо невизначеність виду $\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]$.

Звертаємо увагу тільки на найвищий степінь x (x^4). Розділимо вираз почленно на найвищий степінь x і перейдемо до обчислення нескінченно малих функцій. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^3-5}{4+x-3x^4}=\left[\frac{\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{2x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{x}{x^4}-\frac{3x^4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^4}}{\frac{4}{x^4}+\frac{1}{x^3}-3}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}=0;\\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^4}=0; & \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=0\end{array}\right|=\frac{1+0-0}{0+0-3}=-\frac{1}{3}.$$

<u>Приклад</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x}=\left\{1^\infty\right\}$.

Розв’язок: Використаємо другу чудову границю:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)+1+3}{2x-1}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{3x}=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{2x-1}\right)^{\frac{2x-1}{4}}\right)^{\frac{4}{2x-1}\cdot 3x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x}{2x-1}}=e^{\frac{12}{2-0}}=e^{6}.$$

<u>Приклад</u> Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву (якщо вони існують):

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ якщо } x\le 0,\\ 1-2x, \text{ якщо } 0<x\le 2,\\ 2, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

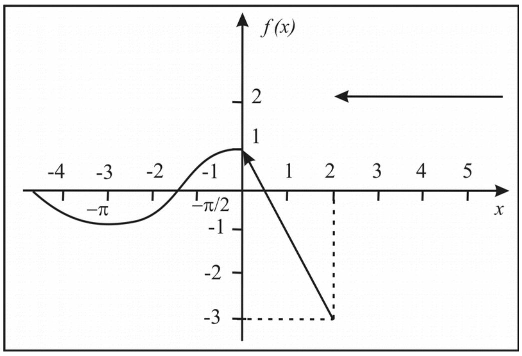
Розв'язок: На різних проміжках функція задана різними аналітичними виразами, кожен із яких є елементарною функцією, тому функція $f(x)$ може мати розриви тільки в тих точках, де змінюється формула функції, тобто в точках $x=0$ та $x=2$.

Розглянемо за означенням:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\cos x=1, \qquad \lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(1-2x)=-3,$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(1-2x)=1, \qquad \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}2=2,$$
$$f(0)=\cos x\big|_{x=0}=1, \qquad f(2)=(1-2x)\big|_{x=2}=-3.$$

У точці $x=0$ функція неперервна. У точці $x=2$ границя зліва скінченна, дорівнює значенню функції в точці, але не дорівнює скінченній границі справа. Отже, $x=2$ - точка розриву першого роду і функція

$f(x)$ неперервна при $x \in (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.



<u>Приклад </u> Дослідити функцію на неперервність: $f(x) = \dfrac{2+x}{1-x}$.

Розв'язок: $f(x)$ - це відношення двох багаточленів. Оскільки при $x = 1$ знаменник $f(x)$ дорівнює нулю, то функція в цій точці невизначена, отже, розривна. Визначимо, якого роду розрив:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{2+x}{1-x} = \frac{2+1-0}{1-(1-0)} = \frac{1}{+0} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{2+x}{1-x} = \frac{2+1+0}{1-(1+0)} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже $x = 1$ – точка розриву другого роду.

<u>Приклад</u> Дослідити функцію на неперервність: $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x+2}$.

Розв'язок: Область визначення цієї функції $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$. Отже, в точці $x = -2$ функція розривна.

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{x^3+8}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2-0} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = 12,$$

$$\lim_{x\to -2+0} \frac{x^3+8}{x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to -2+0} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = 12.$$

Таким чином, однобічні границі існують, скінченні, рівні між собою, але вони не дорівнюють значенню функції в точці. Отже, $x=-2$ - точка усувного розриву. Якщо функцію довизначити:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+8}{x+2}, & \text{якщо } x\neq -2,\\ 12, & \text{якщо } x=-2,\end{cases}$$

то функція $f_1(x)$ буде неперервною при $x\in(-\infty;+\infty)$.

Домашнє завдання:

1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+3}{4-7x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+3}{4-3x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$.

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{4x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+2}\right)^{2x^2+6}$; л) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{5x^2+6}$;