Практичне заняття №

Тема: Похідна функції та її застосування.
Мета: Формування умінь учнів знаходити похідні функцій та застосовувати набуті знання при розв'язанні задач.

1. Знайти похідні функції:

а) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$; б) $y=\cos^5 x$; в) $y=\ln tg\left(\frac{x}{2}\right)$; г) $y=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

Δ а) При диференціюванні необхідно врахувати, що перший доданок представляє степеневу функцію $\left(y=\sqrt{u}\right)$, її аргумент - логарифмічну функцію плюс сталу $\left(u=\ln x+1\right)$, а другий доданок - логарифмічну функцію $\left(y=\ln u\right.$, де $\left.u=\sqrt{x}+1\right)$:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\left(\ln x+1\right)'+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x}+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\frac{1}{x}+\frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x\left(\ln x+1\right)}}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

б) Це складна функція виду $y=u^5$, де $u=\cos x$ (u називається проміжним аргументом). Використовуючи формулу диференціювання складної функції, одержимо:

$$y'_x=\left(u^5\right)'_u\left(\cos x\right)'_x=5u^4\left(-\sin x\right)=-5\cos^4 x\sin x \quad ;$$

в) Тут також складна функція $y=\ln u$, де $u=tgv, v=\frac{x}{2}.$ Тоді

$$y'_x=\left(\ln u\right)'_u\left(tgv\,{}\right)'_v\left(\frac{x}{2}\right)'_x=\frac{1}{u}\frac{1}{\cos^2 v}\cdot\frac{1}{2}¿ \quad =\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin x} \quad ;$$

г) Згідно з правилом диференціювання частки двох функцій:

$$y'=\frac{\left(\sin^2 x\right)'\sqrt{\cos 2x}-\sin^2 x\left(\sqrt{\cos 2x}\right)'}{\cos^2 2x}$$

Враховуючи, що

$$\left(\sin^2 x\right)'=2\sin x\left(\sin x\right)'=2\sin x\cos x=\sin 2x,\left(\sqrt{\cos 2x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\left(\cos 2x\right)'=$$

$$¿\frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}\left(-\sin 2x\right)\left(2x\right)'=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

Отримаємо

$$y'=\frac{\sin 2x\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 x}} \quad ;$$

2. Обчисліть значення похідної функції $y=f\left(x\right)$ при $x=\frac{\pi}{4}$:

а) $y=e^x\sin x$; б) $y=\ln\sqrt{1+ctg^2 x}$.

Δ а) Попередньо знайдемо похідну заданої функції: $y'=\left(e^x\sin x\right)'=e^x\sin x+e^x\cos x$, а потім обчислюємо її значення в точці $x=\frac{\pi}{4}$;

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)=e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$$

б) Попередньо відмітимо, що $y=\frac{1}{2}\ln\left(1+ctg^2x\right)$. Тепер

$$y'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+ctg^2x}\left(1+ctg^2x\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{1+ctg^2x}2\,ctgx\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)=-ctgx;$$

Отже, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-ctg\frac{\pi}{4}=-1$. ▲

3. Знайти диференціал функції

$$y=\frac{x}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}:$$

Δ $dy=f'(x)\cdot dx=\left[\frac{1}{2}\sqrt{49-x^2}+\frac{x}{2}\frac{1}{2\sqrt{49-x^2}}(-2x)+\frac{49}{2}\cdot\frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}\right]dx=$ $\sqrt{49-x^2}\,dx$ ▲

4. Обчислити наближено: а) $\sin 46^\circ$;б) $\sqrt[4]{16{,}64}$

Δ а) Припускаючи $f(x)=\sin x$, знайдемо $f'(x)=\cos x$ і у відповідності з формулою про наближені обчислення

$$\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\Delta x.$$

Враховуючи, що $\sin 46^\circ=\sin(45^\circ+1^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180^\circ}\right)$, візьмемо $x=\frac{\pi}{4}$ і $\Delta x=\frac{\pi}{180^\circ}$

Тоді

$$\sin 46^\circ=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180^\circ}\right)\approx\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{180^\circ}\right);$$

б) Отримаємо спочатку наближену формулу для обчислення коренів будь-якої n-ої степені. Припускаючи $f(x)=\sqrt[n]{x}$, знайдемо

$$f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\ \text{ і }\ \sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}+\frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x,$$

або

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x}\left(1+\frac{\Delta x}{nx}\right)$$

В заданому прикладі

$$\sqrt[4]{x+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x}+\left(1+\frac{\Delta x}{4x}\right)$$

За x візьмемо число, найбільш близьке до 16,64, але щоб було відоме $\sqrt{x}$, при цьому Δx повинне бути достатньо малим. Очевидно, необхідно взяти $x=16$, $\Delta x=0,64$ (але, наприклад, не $x=9$ $\Delta x=7,64$). Отже,

$$\sqrt{16,64}\approx\sqrt{16}\left(1+\frac{0,64}{4\cdot 16}\right)=2\cdot 1,01=2,02$$

▲

5. Витрати бензину у (л) автомобіля на 100 км шляху в залежності від швидкості x (км/год) описуються функцією $y=18-0,3x+0,003x^2$.

Оцінить відносну похибку обчислення витрат бензину при швидкості $x=$ 90 км/год з точністю до 5%.

Δ Знайдемо еластичність функції (по абсолютній величині)

$$|E_x(y)|=|\frac{xf'(x)}{f(x)}|=|\frac{x(-0,3+0,006x)}{18-0,3x+0,003x^2}|$$

При $x=90$ $|E_{x=90}(y)|=1,41$ і за формулою (1) відносна похибка $\delta y=1,41\cdot 5\approx 7,1$ ▲

6. Залежність між витратами виробництва k і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $k=50x-0.05x^3$ (грошова од.). Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції 10 одиниць.

Δ Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $k_1=\frac{k}{x}=50-0,05x^2$, при $x=10$. Середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють

$$k_1(10)=50-0,05\cdot 10^2=45 \quad \text{(гр.од.)}$$

Функція граничних витрат виражається похідною

$k'(x)=50-0,15x^2$;

при $x=10$ граничні витрати складають

$k'(x)=50-0,15\cdot 10^2=35$ (гр.од)

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. один., тоді граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі продукції, що випускається, 10 од.) складає 35 гр.од. ▲

7. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. гривень) і випуском продукції x (тис. гривень) виражається функцією

$y=-0,5x+80$

Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, що дорівнює 60 тис. гривень.

Δ Згідно формули (1) еластичність собівартості

$$E_x(y)=\frac{-0,5x}{-0,5x+80}=\frac{x}{x-160}$$

При $x=60$ $E_{x=60}(y)=-0,6$, тобто при випуску продукції, що дорівнює 60 тис. гривень, збільшення його на 1% приведе до зниження собівартості на 0,6%.

▲

9. Дослідним шляхом встановлені функції попиту $g=\frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s=p+0.5$, де g і s - кількість товару, відповідно купленого і пропонованого на продаж в одиницю часу, p - ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиції урівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

Δ а) Рівноважна ціна визначається із умови $g=1$: $\frac{p+8}{p+2}=p+0.5$, звідки $p=2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грошовим одиницям.

б) Знайдемо еластичності по попиту і пропозиції за формулою (1)

$$E_p(g)=-\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \qquad E_p(s)=\frac{2p}{2p+1};$$

Для рівноважної ціни $p=2$ маємо

$$E_{p=2}(g)=-0{,}3; \qquad E_{p=2}(s)=0{,}8.$$

Оскільки отримані значення еластичності по абсолютній величині менше 1, тоді і попит і пропозиції даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни р на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція підвищиться на 0,8%.

в) При підвищенні ціни р на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5\cdot 0{,}3=1{,}5$, отже, доход зростає на 3,5%.

Загальний план дослідження функції

1. Знайти область визначення та значення функції, заданої формулою, якщо таку область не зазначено.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. З’ясувати точки перетину функції з вісями координат.
4. Дослідити функцію на неперервність.
5. Знайти асимптоти графіка функції (якщо вони існують).
6. З’ясувати, як функція поводиться на кінцях кожного з проміжків області визначення (знайти границі функції на кінцях цих проміжків, якщо вони є).
7. Дослідити функцію на диференційовність.
8. Дослідити функцію на монотонність та екстремуми. Знайти екстремуми і значення функції в точках екстремуму.
9. Дослідити функцію на опуклість (вгнутість): знайти інтервали опуклості (вгнутості), а також точки перегину функції.
10. Знайти найбільше і найменше значення функції (якщо вони існують).
11. Побудувати графік функції

10. Дослідити функцію й побудувати її графік $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язок:

1. Область визначення: $x\in(-\infty;+\infty)$.
2. Парність, непарність:

$$y(-x)=\frac{2(-x)}{1+(-x)^2}=\frac{-2x}{1+x^2}=-\frac{2x}{1+x^2}=-y(x), \Rightarrow$$

функція непарна, а отже, її графік симетричний відносно початку координат.

3. Точки перетину з осями координат:

$x=0$; $y=\frac{2\cdot 0}{1+0^2}=0$; $y=0$; $2x=0$, $x=0$.

Отже, маємо одну точку перетину графіка функції з осями координат: $(0;0)$.

4. Проміжки зростання й спадання функції. Екстремуми функції.

$$y' = \frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2};$$

$y'=0$, якщо $(1-x)(1+x)=0$; $x=1$, $x=-1$;

y' не існує, коли $\left(1+x^2\right)^2=0$, $x=\varnothing$.

$y' < 0 \quad y' > 0 \quad y' < 0$

-1 1 x

Отже, на проміжках $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ – функція спадає, а на проміжку $(-1;1)$ – зростає.

В точці з абсцисою $x=-1$ функція досягає мінімуму.

$$y(-1) = \frac{2\cdot(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-2}{2} = -1;$$ $(-1;-1)$ – точка мінімуму.

В точці з абсцисою $x=1$ функція досягає максимуму.

$$y(1) = \frac{2\cdot 1}{1+1^2} = \frac{2}{2} = -1;$$ $(1;1)$ – точка максимуму.

5. Проміжки опуклості й увігнутості. Точки перегину.

$$y'' = \frac{-4x\left(1+x^2\right)^2-\left(2-2x^2\right)\cdot 2\left(1+x^2\right)\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{\left(1+x^2\right)^2\left[-4x\left(1+x^2\right)-\left(2-2x^2\right)\cdot 4x\right]}{\left(1+x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-4x-4x^3-8x+8x^3}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{4x^3-12x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

$y''=0$, якщо $4x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$; $x_1=0$; $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$.

$y'' < 0 \quad y'' > 0 \quad y'' < 0 \quad y'' > 0$

$-\sqrt{3}$ 0 $\sqrt{3}$ x

На проміжках $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(0;\sqrt{3}\right)$ функція опукла; на проміжках $\left(-\sqrt{3};0\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – функція увігнута. Точки з абсцисами $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ – точки перегину.

$$y\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{-2\sqrt{3}}{1+3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad y(0)=0; \quad y\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Асимптоти

а) Так як немає точок розриву функції, то немає й вертикальних асимптот.

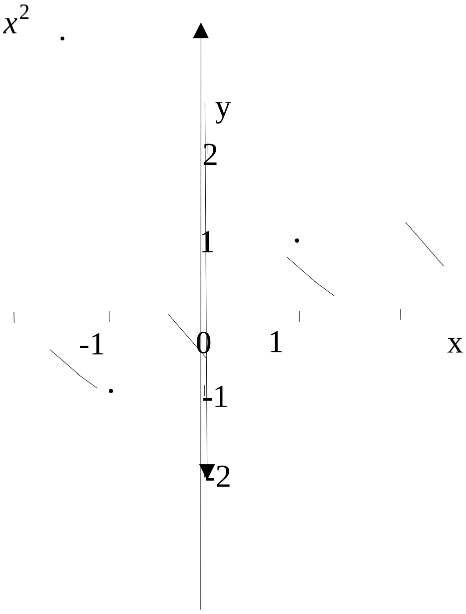
б) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+x^2} = 0;$$

Отже, $y=0$ – горизонтальна асимптота.

в) Для знаходження похилих асимптот $y=kx+b$ знайдемо $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)\cdot x} = 0$. Так як $k=0$, то похилих асимптот немає.

7. Графік функції $y=\frac{2x}{1+x^2}$.



Домашнє завдання:

1. Знайти похідні:

а). $y=2^{3x}/3^{2x}$. *Відповідь.* $y'=\left(\frac{8}{9}\right)^x\cdot\ln\frac{8}{9}$.

б). $y=x\arccos\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$. *Відповідь.* $y'=\arccos\frac{x}{2}$.

в). $y=\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Відповідь.* $y'=\frac{1}{\cos x}$.

2. Дослідити функцію $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ і побудувати її графік.