Практичне заняття №

Veni, vidi, vici
(Вени, види, вичи)
Прийшов, побачив, переміг

Тема: Дослідження функцій багатьох змінних. Знаходження точок екстремуму функцій багатьох змінних.
Мета: навчитися знаходити частинні похідні та локальні екстремуми функцій двох змінних.
План:

1. Частинні похідні функції багатьох змінних.
2. Знаходження локальних екстремумів функцій двох змінних.

1. Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=x^3y+\sin\left(x^2+\sqrt{y}\right)+\operatorname{tg}x+\ln y$.

Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y=\text{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\cdot 2x+\frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x=\text{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3+\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{y}.$$

Приклад. Знайти z'_x і z'_y для функції $z=x^2y+xy^2$.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y=\text{const}$:

$z'_x=2xy+y^2$.

Знайдемо z'_y, вважаючи $x=\text{const}$:

$z'_y=x^2+2xy$.

2. Приклад. Знайти екстремуми функції $f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2$.

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x}=2-2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=8-4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $8-4y=0$ ¿ {¿¿¿ ¿. Розв’язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, звідки дістаємо, що $\Delta=8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$.

Приклад. Дослідити функцію $z=(x-1)^2+2y^2-1$ на екстремум.

Спочатку знаходимо критичні точки. Для цього знаходимо частинні похідні:

$z'_x=2(x-1)$, $z'_y=4y$.

Прирівнюємо їх до нуля і маємо $x=-1,\ y=0$. Таким чином, у точці $M_0(-1,\ 0)$ виконуються необхідні умови екстремуму. Далі:

$z''_{xx}=2$, $z''_{yy}=4$, $z''_{xy}=0$,

$A=2$, $B=0$, $C=4$, $\Delta=2\cdot 4-0=8>0$.

Виходячи з першої достатньої умови, функція має екстремум, а оскільки $A>0$, то мінімум: $z_{\min}=z(-1,\ 0)=3$.

Приклад. Знайти екстремум функції $z=x^3+y^3-3xy$.

Маємо $\int x\sqrt[3]{x+1}dx=\int (t^3-1)\cdot t\cdot 3t^2dt=3\int t^6dt-3\int t^3dt=$ $=\frac{3}{7}t^7-\frac{3}{4}t^4+C=\frac{3}{7}\sqrt[3]{x+1}-\frac{3}{4}(\sqrt[3]{x+1})^4+C$

Розв’язуємо систему $\int \sin 4xdx=-\frac{1}{4}\cos 4x+C$,

звідки знаходимо дві критичні (стаціонарні) точки: M_0=(0,0) та M_1(1,1).

Обчислюємо другі частинні похідні:

$\int x^3 \ln x dx$; $du=\frac{dx}{x}\ ;\ v=\int x^3dx=\frac{x^4}{4}$; $C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$.

У точці M_0=(0,0) маємо: A=0, B= -3, C=0, отже, AC-B^2 = -9<0, тобто екстремуму немає.

У точці M_1(1,1) маємо: A=6, B= -3, C=6, отже, AC-B^2=27>0, A=6>0.

Функція z = z(x,y) має мінімум у точці (1,1) .

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $z=xy-x^2-2y^2+x+10y-8$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y-2x+1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x-4y+10$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему

$$\begin{cases} y-2x+1=0, \\ x-4y+10=0. \end{cases}$$

Знайдемо із першого рівняння $y=2x-1$ і підставимо у друге:

$$\begin{cases} x-4(2x-1)+10=0, \\ y=2x-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-8x+14=0, \\ y=2x-1. \end{cases}$$

x = 2, y=3

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{xx}=-2, z''_{xy}=1, z''_{yy}=-4.$$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам в будь-який точці, а значить і в точці P0(2;3). Тому A=-2, B=1, C=-4.

AC-B2=(-2)(-4)-1=7>0.

Таким чином, в точці P0 (2;3) функція має максимум

$$z(2;3)=2\cdot3-2^2-2\cdot3^2+2+10\cdot3-8=8.$$

Домашнє завдання:

1. Дослідити на екстремум функції:

1) $z=x^2y-3x^2+2y-1$
2) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$
3) $z=x^3+8y^3-6xy+1$
4) $z=-800-x^2-y^2+40x+60y$